ZAKRES TEMATYKI ROZMOWY KWALIFIKACYJNEJ NA STUDIA DOKTORANCKIE W ZAKRESIE MATEMATYKI

I. PODSTAWY MATEMATYKI

1. Relacja w zbiorze, relacja równoważności, zbiór ilorazowy – definicje i przykłady.
2. Porządek w zbiorze, porządek liniowy, dobry porządek – definicje i przykłady.
3. Lemat Kuratowskiego–Zorna – przykłady zastosowań.
4. Funkcja, funkcja różnowartościowa, funkcja surjektywna („na”), bijekcja, równoliczność zbiorów, zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne – definicje i przykłady.
5. Aksjomatyka Peano liczb naturalnych,
6. Pojęcie teorii matematycznej. Aksjomatyzacja teorii, przykłady teorii określonych aksjomatycznie.
7. Konstrukcja zbioru liczb całkowitych, działania w $\mathbb{Z}$. (Liniowy) porządek w $\mathbb{Z}$. Twierdzenie o dzieleniu z resztą w $\mathbb{Z}$, kongruencje w $\mathbb{Z}$ i ich zastosowania.
8. Konstrukcje zbiorów liczb wymiernych, rzeczywistych i zespolonych. Działania w tych zbiorach.

II. ALGEBRA

1. Działania (dodawanie i mnożenie) w zbiorze liczb naturalnych. Dobry porządek w $\mathbb{N}$. Liczby pierwsze.
2. Grupy i ich homomorfizmy. Dzielnik normalny, grupa ilorazowa. Izomorfizm grup (definicje i przykłady).
3. Grupy cykliczne i grupy abelowe skończenie generowane.
4. Pierścienie i ich homomorfizmy. Ideał, pierścień ilorazowy. Ideały pierwsze, maksymalne, dziedziny i ciała – definicje i przykłady.
5. Pierścień wielomianów o współczynnikach w danym pierścieniu przemiennym. Ideały w pierścieniu $K[X]$ (K ciało). Wielomiany nierozkładalne. Pierwiastki wielomianu, twierdzenie Bézouta.

6. Dziedziny z jednoznacznością rozkładu – definicje i przykłady, w tym $\mathbb{Z}$ i $K[X]$.
7. Rozszerzenia Galois. Podstawowe twierdzenia teorii Galois dla ciał charakterystyki zero. Równania wielomianowe o współczynnikach zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry.
8. Kryterium rozwiązalności równania wielomianowego w pierwiastnikach, przykłady równań nierozwiązalnych w pierwiastnikach.
9. Przestrzenie i przekształcenia liniowe. Baza i wymiar przestrzeni, macierz przekształcenia – definicje i przykłady.
10. Układy równań liniowych i metody ich rozwiązywania.
11. Wielomian charakterystyczny macierzy i endomorfizmu, znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy.
12. Formy kwadratowe i klasyfikacja stożkowych.

III. ANALIZA MATEMATYCZNA

1. Elementarne funkcje zmiennej rzeczywistej i zespolonej.
2. Pojęcie granicy ciągu, funkcji, szeregu liczbowego i funkcyjnego. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów.
3. Odwzorowania ciągłe – definicja, przykłady, podstawowe własności (w tym własności odwzorowań ciągłych na przestrzeniach zwartych i przestrzeniach spójnych). Twierdzenie Weierstrassa o wielomianowej aproksymacji funkcji ciągłych.
4. Różniczkowalne odwzorowania przestrzeni euklidesowych, pochodne – słaba i mocna, definicje, przykłady, podstawowe własności.
5. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego w przestrzeniach euklidesowych takie jak twierdzenie o pochodnej superpozycji odwzorowań, twierdzenie o lokalnym odwracaniu odwzorowań i twierdzenie o funkcji uwikłanej.
6. Badanie przebiegu różniczkowalnych funkcji rzeczywistych za pomocą pochodnych (w tym znajdowanie przedziałów monotoniczności, ekstremów lokalnych i punktów przegięcia).
7. Szeregi potęgowe (zbieżność punktowa i jednostajna, znajdowanie promieni zbieżności). Szereg Taylora.
8. Wzór Taylora dla funkcji rzeczywistej i jego zastosowania (m.in. do znajdowania ekstremów i obliczania przybliżeń wartości funkcji).

9. Funkcje całkowalne w sensie Riemanna, całka Riemanna – definicje, podstawowe własności, zastosowanie całki Riemanna w geometrii, całkowanie numeryczne.
10. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych.
11. Równania różniczkowe liniowe.
12. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Równania Cauchy'ego–Riemanna. Pojęcie funkcji holomorficznej. Rozwijalność funkcji w szereg Laurenta.
13. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha, operatory liniowe i ciągłe. Twierdzenia Hahna–Banacha i Banacha–Steinhausa.

IV. GEOMETRIA I TOPOLOGIA

1. Geometria Euklidesa, płaszczyzna Euklidesa.
2. Grupy przekształceń przestrzeni euklidesowej i ich niezmienniki (przekształcenia afiniczne, podobieństwa, izometrie).
3. Analityczny opis ważniejszych podzbiorów dwu- i trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej (m.in. prostych, okręgów, stożkowych, płaszczyzn, sfer).
4. Konstrukcje geometryczne.
5. Przykłady geometrii nieeuklidesowych.
6. Przestrzeń topologiczna – definicja, przykłady, metody definiowania topologii. Operacje na przestrzeniach topologicznych: podprzestrzenie, produkt, przestrzeń ilorazowa.
7. Przestrzenie zupełne – definicja, przykłady, podstawowe własności (w tym twierdzenie Banacha o odwzorowaniach zwężających wraz z zastosowaniami w analizie).
8. Przestrzenie zwarte – definicja, przykłady, podstawowe własności (w tym zupełność, charakteryzacja zbiorów zwartych w przestrzeni euklidesowej, twierdzenie Borela–Lebesgue'a).
9. Przestrzenie spójne – definicja, przykłady, podstawowe własności.

V. MIARA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1. Miara – definicja, podstawowe własności. Miara Lebesgue'a, ważniejsze miary rozważane w teorii prawdopodobieństwa.

2. Całka względem dowolnej miary – definicja, podstawowe własności. Całka Lebesgue'a a całka Riemanna. Zastosowania całki w teorii prawdopodobieństwa.
3. Twierdzenia o granicznym przejściu pod znakiem całki.
4. Zmienne losowe, wektory losowe i ich charakterystyki (w tym wartości oczekiwane, wariancje, rozkłady).
5. Niezależność zmiennych losowych (oraz zdarzeń i rodzin zdarzeń). Schemat Bernoulliego.
6. Nierówność Czebyszewa i słabe prawo wielkich liczb. Mocne prawo wielkich liczb.
7. Centralne twierdzenie graniczne.
8. Estymacja punktowa parametrów rozkładów. Estymatory zgodne i nieobciążone.

VI. MATEMATYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

1. Złożoność obliczeniowa algorytmów. Klasy P, NP, problemy NP-zupelne.
2. Wykorzystanie gramatyk do opisu jezyków programowania.
3. Wykorzystanie wyrażeń regularnych i automatów Rabina–Scotta w automatycznym przetwarzaniu tekstów.
4. Gramatyki bezkontekstowe, notacja Backusa–Naura.
5. Poprawność i złożoność algorytmu.
6. Algorytmy sortowania.
7. Podstawowe algorytmy sekwencyjne: grafowe, geometryczne, tekstowe.
8. Struktury danych i ich wpływ na złożoność algorytmów.

VII. ELEMENTY PROGRAMOWANIA I PRZETWARZANIA DANYCH

1. Pojęcia klasy i obiektu. Przykład klasy i kilku obiektów tej klasy.
2. Dziedziczenie. Przykład hierarchii klas.
3. Metody wirtualne. Przykład ilustrujący ich użyteczność.
4. Konstruktory i destruktory. Rodzaje konstruktorów w C++.
5. Podstawowe własności baz danych.
6. Relacyjne bazy danych (model danych, klucze, postaci normalne, SQL).
7. Bezpieczeństwo danych.
8. Rozproszone bazy danych.