Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Egzamin wstępny z matematyki

22 czerwca 2004 roku

Czas trwania egzaminu: 240 minut

I grupa zadań

1. Dla dowolnej liczby $x < -2$ prawdziwa jest równość $\dfrac{x^2-4}{|2-x|} + |-x| + 3x =$

A) $3x+2$.
B) $3x-2$.
C) $x-2$.

2. Równanie $x^2+y^2+2x-4y=11$ przedstawia okrąg

A) o środku w punkcie $O=(1,-2)$ i promieniu $r=4$.
B) o środku w punkcie $O=(-1,2)$ i promieniu $r=4$.
C) o środku w punkcie $O=(-1,-2)$ i promieniu $r=16$.

3. $2\sqrt{3} + \log_3 81 - 3^{\log_9 3} =$

A) 4.
B) $4+\sqrt{3}$.
C) $2+\sqrt{3}$.

4. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$. Wówczas $f'(2) =$

A) -2.
B) $-\frac{1}{2}$.
C) $-\frac{3}{2}$.

5. Liczby x, $2x+6$, $4x+36$ są trzema kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Wówczas

A) $x=2$.
B) $x=3$.
C) $x=6$.

6. $\dfrac{27^{n+2} - 6\cdot 3^{3n+3}}{3^n \cdot 9^{n+2}} =$

A) 3.
B) 7.
C) 3^{n+1}.

7. Liczby x i y są przeciwnych znaków i zachodzi równość $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+3y^2} = \dfrac{1}{2}$. Wówczas $\dfrac{x}{y} =$

A) 2.
B) -1.
C) $-\frac{1}{2}$.

8. Układ równań $\begin{cases} -x+3y = 3 \\ \frac{1}{3}x - y = 1 \end{cases}$

A) jest oznaczony.
B) jest nieoznaczony.
C) jest sprzeczny.

9. Liczba $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$

A) jest równa $\frac{1}{3}$.
B) jest wymierna.
C) jest dodatnia.

10. $6\cdot 0{,}(2) =$

A) $1{,}(3)$.
B) $1{,}2$.
C) $1{,}3$.

II grupa zadań

11. Miary kolejnych kątów pewnego czworokąta są w proporcji $4:3:5:6$. Wynika stąd, że

A) jeden z kątów ma miarę 100°.
B) na tym czworokącie można opisać okrąg.
C) ten czworokąt ma dokładnie dwa kąty ostre.

12. Objętość i pole powierzchni pewnej kuli wyrażają się tą samą liczbą. Wówczas

A) promień tej kuli jest równy $\sqrt{3}$.
B) kula ta ma pole powierzchni równe 45π.
C) kulę tę można wpisać w sześcian o krawędzi długości 6.

13. Powierzchnia boczna pewnego stożka po rozcięciu wzdłuż tworzącej i ułożeniu na płaszczyźnie jest wycinkiem koła o kącie 120°. Wynika stąd, że

A) miara kąta, jaki tworząca tworzy z wysokością, jest mniejsza od 30°.
B) stosunek promienia podstawy do tworzącej jest równy $1:3$.
C) pole powierzchni bocznej tego stożka jest 3 razy większe od pola podstawy.

14. Na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych rozważamy figurę złożoną z wszystkich punktów, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność $|x| + |y| \leqslant 1$.

A) Pole tej figury jest równe 2.
B) Figura ta posiada cztery osie symetrii.
C) Koło o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = \frac{3}{4}$ jest zawarte w tej figurze.

15. Długości boków pewnego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, a jego obwód jest równy 120. Wówczas

A) jeden z boków tego trójkąta musi mieć długość 40.
B) najdłuższy bok tego trójkąta może mieć długość 60.
C) trójkąt ten musi być prostokątny.

16. Liczba przekątnych pewnego wielokąta foremnego jest równa 54. Wynika stąd, że

A) wielokąt ten jest dwunastokątem.
B) suma miar kątów wewnętrznych tego wielokąta przekracza 2000°.
C) stosunek promienia okręgu opisanego na tym wielokącie do boku tego wielokąta jest większy niż 2.

17. Dany jest trapez równoramienny o podstawach długości a i $2a$, w którym kąt przy dłuższej podstawie ma miarę 60°.

A) Promień okręgu opisanego na tym trapezie jest równy a.
B) Środek okręgu opisanego na tym trapezie leży na dłuższej podstawie.
C) W ten trapez można wpisać okrąg.

18. Miary kątów pewnego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Wówczas na pewno

A) jeden z kątów tego trójkąta ma miarę 60°.
B) trójkąt ten ma tylko dwa kąty ostre.
C) długości boków tego trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny.

19. Liczba naturalna $n > 2$ spełnia warunek $4 \cdot \binom{n}{2} = \binom{n+2}{3}$. Wtedy

A) $n = 7$.
B) $\binom{n}{3} = 21$.
C) $\binom{n}{4} = \binom{n}{3}$.

20. Liczba $\binom{36}{14}$

A) w zapisie dziesiętnym kończy się trzema zerami.
B) jest podzielna przez 4.
C) jest podzielna przez 29.

21. Liczba permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, w których liczba 1 nie jest pierwszym ani ostatnim elementem, jest równa

A) $n! - (n-1)!$.
B) $(n-1)! \cdot (n-2)$.
C) $n! - 2 \cdot (n-1)!$.

22. Prawdopodobieństwa $P(A)$ i $P(B)$ zdarzeń A i B są dodatnie oraz $P(A \mid B) = \frac{1}{2}$. Wynika stąd, że

A) zawsze $P(A) = P(B)$.
B) jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to $P(A) = \frac{1}{2}$.
C) zawsze $P(B \mid A) = \dfrac{P(B)}{2P(A)}$.

23. Wśród liczb wymiernych postaci $\dfrac{19n+17}{7n+11}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant 1$,

A) jest nieskończenie wiele liczb naturalnych.
B) jest tylko jedna liczba naturalna.
C) nie ma liczb naturalnych.

24. Liczby $\log ab^2$ i $\log ab^3$ są odpowiednio trzecim i czwartym wyrazem pewnego ciągu arytmetycznego. Wówczas na pewno

A) ciąg ten jest rosnący.
B) suma n pierwszych wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{n}{2} \cdot \log a^2 b^{n-1}$.
C) pierwszym wyrazem tego ciągu jest $\log a$.

25. Suma pierwszych dziesięciu wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego jest dodatnia. Wynika stąd, że

A) pierwszy wyraz tego ciągu musi być dodatni.
B) różnica tego ciągu musi być dodatnia.
C) suma wyrazów od jedenastego do dwudziestego musi być dodatnia.

26. Niech $A = 1 + \sin^2 15^\circ + \sin^4 15^\circ + \ldots$, gdzie po prawej stronie równości jest suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego. Wówczas

A) $A = \dfrac{1}{\sin^2 75^\circ}$.
B) $A = \frac{4}{3}$.
C) $A = \dfrac{1}{1 + \sin^2 15^\circ}$.

27. Suma n pierwszych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = \dfrac{4}{3} \cdot (4^n - 1)$ dla każdego n. Wówczas

A) $a_n = 4^{n+1}$ dla każdego n.
B) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.
C) $a_2 = 16$.

28. Dany jest ciąg (x_n) określony następująco: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + 6$ dla $n \geqslant 1$.

A) Liczba 103 jest wyrazem tego ciągu.
B) Liczba 101 jest wyrazem tego ciągu.
C) Suma 101 początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 10000.

29. Równanie $||x - 2| - 4| = 3$

A) nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.
B) nie ma rozwiązań ujemnych.
C) ma dokładnie cztery rozwiązania w liczbach rzeczywistych.

30. Niech α, β będą różnymi rozwiązaniami równania $x^2 + 3x - 5 = 0$. Wtedy

A) $(\alpha + 2)(\beta + 2) = -7$.
B) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = -\dfrac{3}{5}$.
C) $\alpha > 0$ i $\beta > 0$.

31. Funkcje $f(x) = x^2 - 5x + 6$ i $g(x) = 2x^2 + px + q$ mają wspólne miejsca zerowe. Wówczas

A) $q = -12$.
B) punkt $A = (1, 0)$ należy do wykresu funkcji $y = g(x)$.
C) wykresy tych funkcji mają wspólną oś symetrii.

32. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^4 - 5x^2 - x + 6$ przez wielomian $F(x) = x^2 - x - 2$ jest równa

A) $2x - 1$.
B) $-x + 2$.
C) $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

33. Dana jest funkcja $f(x) = 2^{x^2} - 1$.

A) Zbiorem wszystkich wartości tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.
B) Funkcja f jest parzysta.
C) Funkcja f ma jedno miejsce zerowe.

34. Dana jest funkcja $f(x) = \log_3 \dfrac{x+4}{x-4}$. Wówczas

A) $f(x)$ posiada sens liczbowy tylko dla $x \in (4, +\infty)$.
B) $f(5) > f(-5)$.
C) funkcja ta przyjmuje wartości dodatnie dla $x > 4$.

35. Dane są funkcje $f(x) = x^4 + x^2 + 3x$ i $g(x) = 3x - 2$.

A) Ich wykresy nie mają punktów wspólnych.
B) Istnieje tylko jedna styczna do wykresu funkcji f równoległa do wykresu funkcji g.
C) Prosta będąca wykresem funkcji g jest styczna do wykresu funkcji f.

36. Funkcja $f(x) = x^4 + x^2$

A) w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$ jest rosnąca.
B) posiada minimum lokalne.
C) jest parzysta.

37. Dana jest funkcja $f(x) = x - 4 \cdot \sqrt{x}$. Wówczas

A) $f(8) < f(2)$.
B) równanie $f(x) = -4$ nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.
C) funkcja f w przedziale $\langle 4, +\infty)$ jest rosnąca.

38. Dany jest wielomian $W(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{2004} \cdot (x^2 + 5x - 6)^{100}$.

A) Suma współczynników tego wielomianu jest równa 6^{100}.
B) Wielomian ten ma tylko trzy pierwiastki.
C) Zbiorem rozwiązań nierówności $W(x) \geqslant 0$ jest zbiór liczb rzeczywistych.

39. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + px + q$ jest symetryczny względem osi OY. Wówczas na pewno

A) $p \cdot q = 0$.
B) funkcja f ma dwa miejsca zerowe.
C) funkcja f jest parzysta.

40. $\operatorname{tg} 105^\circ =$

A) $\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ$.
B) $-2 - \sqrt{3}$.
C) $\dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ}$.

41. Wiadomo, że $\cos 2\alpha = \dfrac{3}{8}$, gdzie $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. Wówczas

A) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{4}$.
B) $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$.
C) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{5}{11}}$.

42. $\sqrt{\cos^2 315^\circ} - \sqrt{\sin^2 315^\circ} =$

A) $\cos 315^\circ + \sin 315^\circ$.
B) $\cos 315^\circ - \sin 315^\circ$.
C) $\sqrt{2}$.

43. Dane są okręgi o równaniach $x^2+y^2+2x-2y+1 = 0$, $x^2+y^2+4x+2y+4 = 0$.

A) Okręgi te przecinają się w dwóch punktach.
B) Okręgi te są styczne zewnętrznie.
C) Prosta o równaniu $y = 2x + 3$ przechodzi przez ich środki.

44. Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ i punkt $A = (7, 2)$.

A) Odległość punktu A od środka okręgu jest równa $2\sqrt{5}$.
B) Punkt A leży wewnątrz koła ograniczonego tym okręgiem.
C) Istnieje styczna do tego okręgu przechodząca przez punkt A.

45. Dane są dwa punkty: $A = (4, -2)$, $B = (0, 16)$. Wtedy

A) punkt $P = (2, 9)$ jest środkiem odcinka AB.
B) wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[4, 18]$.
C) okrąg o środku w punkcie A i promieniu 18 przechodzi przez punkt B.

III grupa zadań

46. Boki pewnego trójkąta mają długości a, b i c, a kąty leżące naprzeciw tych boków mają miary α, β i γ, odpowiednio. Wówczas na pewno

A) $ab\sin\gamma = ac\sin\beta$.
B) $\dfrac{\cos\alpha}{a} + \dfrac{\cos\beta}{b} + \dfrac{\cos\gamma}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$.
C) $\dfrac{a}{\sin\beta} = \dfrac{b}{\sin\alpha}$.

47. Grupę $2n + 1$ osób, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, rozdzielamy w dowolny sposób na dwie niepuste rozłączne grupy A i B takie, że w grupie A jest mniej osób niż w grupie B. Liczba wszystkich możliwych takich par (A, B) jest równa

A) $\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \ldots + \binom{2n+1}{n-1} + \binom{2n+1}{n}$.
B) $\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \ldots + \binom{2n+1}{2n-1} + \binom{2n+1}{2n}$.
C) $\dfrac{2^n - 2}{2}$.

48. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ określamy liczbę $f(n) = 9^{2n} - 5^{2n}$. Wówczas dla dowolnego n

A) $f(n+1) - 25f(n) = 56 \cdot 9^{2n}$.
B) $7 \mid f(n)$.
C) cyfrą jedności liczby $f(n)$ jest 6.

49. Pole czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu R

A) może być dowolnie małe.
B) może być równe $2R^2$.
C) może być większe niż $2R^2$.

50. Pewien romb o kącie ostrym 30° i pewien kwadrat mają równe pola. W każdy z tych czworokątów wpisano koło. Wówczas

A) pole koła wpisanego w kwadrat jest dwa razy większe niż pole koła wpisanego w romb.
B) stosunek obwodów tych kół jest równy $\sqrt{2} : 1$.
C) długość promienia koła wpisanego w romb jest 4 razy mniejsza niż długość boku tego rombu.