Zagadnienia na egzamin licencjacki

Kierunek Matematyka, studia stacjonarne
specjalność ogólna

Zaleca się, by egzamin dyplomowy składał się z co najmniej trzech pytań. Jedno z pytań dotyczyć może tematyki pracy dyplomowej, może być to krótka prezentacja pracy lub pytanie dotyczące zagadnień bezpośrednio z nią związanych. Pytanie takie może wykraczać poza poniższy zestaw zagadnień. Pozostałe pytania dotyczą treści przedmiotów obowiązkowych oraz przedmiotów do wyboru realizowanych przez studenta, zob. lista poniżej.

Podstawy matematyki

1. Rachunek zdań i kwantyfikatorów. Algebra zbiorów.
2. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji, funkcje różnowartościowe i „na”.
3. Relacje. Relacja równoważności, zbiory ilorazowe - definicje i przykłady.
4. Moc zbioru. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.
5. Porządek w zbiorze, porządek liniowy, dobry porządek - definicje i przykłady. Lemat Kuratowskiego-Zorna - przykłady zastosowań.
6. Aksjomatyka Peano liczb naturalnych. Indukcja matematyczna.

Algebra

1. Teoria podzielności liczb całkowitych (NWD, algorytm Euklidesa, liczby pierwsze, kongruencje).
2. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej, pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej.
3. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.
4. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń, liniowa niezależność, baza, wymiar.
5. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.
6. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania, eliminacja Gaussa, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.
7. Równania prostych i płaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ (równanie ogólne, kierunkowe, parametryczne, wyznacznikowe). Iloczyn wektorowy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
8. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu). Wartości własne i wektory własne endomorfizmów i macierzy.
9. Rzeczywiste funkcjonały dwuliniowe, funkcjonały dodatnio określone, kryterium Sylvestera, ortonormalizacja Schmidta, iloczyn skalarny, nierówność Schwarza.

10. Grupy - definicja i podstawowe przykłady (grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n). Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.

11. Pierścienie - definicja i podstawowe przykłady (pierścień liczb całkowitych, pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy kwadratowych nad danym ciałem, pierścienie $\mathbb{Z}_n$ reszt modulo n). Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.

12. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, ciała skończone F_p). Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.

Analiza matematyczna

1. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.

2. Pojęcie ciągu liczbowego i jego granicy. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów. Podciągi i punkty skupienia. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.

3. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.

4. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na przestrzeniach zwartych i spójnych.

5. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).

6. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.

7. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego.Szereg potęgowy. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.

8. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.

9. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.

10. Pojęcie metryki oraz przestrzeni metrycznej. Przykłady przestrzeni metrycznych.

11. Zbieżność w przestrzeni metrycznej. Pojęcie zbioru otwartego i domkniętego w przestrzeni metrycznej. Pojęcie ciągłości odwzorowań przestrzeni metrycznych.

12. Pojęcie przestrzeni metrycznej spójnej, zwartej oraz zupełnej i ich własności. Charakteryzacja zbioru zwartego w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zasada Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji.

13. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne: cząstkowe, słaba, mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.

14. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).

15. Całkowanie funkcji wielu zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).

16. Miara Lebesgue'a. Całka Lebesgue'a, porównanie z całką Riemanna.

Równania różniczkowe zwyczajne

1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.
2. Liniowe równania różniczkowe.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).
2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, definicja prawdopodobieństwa w przestrzeniach przeliczalnych.
3. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.
4. Zmienne losowe, wektory losowe i ich charakterystyki liczbowe (wartości oczekiwane, wariancje).
5. Podstawowe rozkłady zmiennych losowych (normalny, Poissona, dwumianowy, jednostajny i wykładniczy).
6. Niezależność zmiennych losowych (oraz zdarzeń i rodzin zdarzeń). Schemat Bernoulliego.
7. Nierówność Czebyszewa i słabe prawo wielkich liczb. Mocne prawo wielkich liczb.
8. Centralne twierdzenie graniczne.

Statystyka

1. Elementy statystyki opisowej (histogram, wielokąt częstości, krzywa częstości względnych, miary tendencji centralnej i rozproszenia).
2. Estymacja punktowa i przedziałowa wartości oczekiwanej.