Zagadnienia na egzamin licencjacki

Kierunek: matematyka, specjalność: nauczanie matematyki

Zaleca się, by egzamin dyplomowy składał się z co najmniej trzech pytań. Jedno z pytań dotyczyć może tematyki pracy dyplomowej, może być to krótka prezentacja pracy lub pytanie dotyczące zagadnień bezpośrednio z nią związanych. Pytanie takie może wykraczać poza poniższy zestaw zagadnień. Pozostałe pytania dotyczą treści przedmiotów obowiązkowych oraz przedmiotów do wyboru realizowanych przez studenta, zob. lista poniżej.

Analiza matematyczna

1. Rachunek zdań, algebra zbiorów. Relacje: równoważności, porządku.
2. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji, funkcje różnowartościowe i „na".
3. Przegląd funkcji elementarnych (definicje, wykresy i podstawowe własności).
4. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
5. Pojęcie granicy ciągu liczbowego. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów, w tym twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.
6. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
7. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na odcinkach domkniętych i ograniczonych.
8. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
9. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
10. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
11. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.

12. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.

13. Podstawowe pojęcia topologii metrycznej, przestrzenie zupełne, zwarte i spójne; podzbiory zwarte przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

14. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne cząstkowe i pochodna mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.

15. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).

16. Całkowanie funkcji dwóch i trzech zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).

Algebra

1. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej.

2. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.

3. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń liniowa niezależność, baza, wymiar.

4. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.

5. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania, eliminacja Gaussa, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capelliego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.

6. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu), znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy.

7. Funkcjonały dwuliniowe - istnienie bazy ortogonalnej, funkcjonały dodatnio określone, kryterium Sylvestera, ortogonalizacja Schmidta, iloczyn skalarny, nierówność Schwarza.

8. Grupy - grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n. Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.

9. Pierścienie - pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy kwadratowych nad danym ciałem, pierścienie reszt modulo n. Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.
10. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, ciała skończone F_p). Ciała algebraicznie domknięte.

Arytmetyka i matematyka dyskretna

1. Podzielność liczb całkowitych, własności liczb pierwszych, rozkład na czynniki, algorytm Euklidesa.
2. Własności kongruencji w zbiorze liczb całkowitych, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Wilsona.
3. Funkcja Eulera, twierdzenie Eulera. Twierdzenie chińskie o resztach.
4. Podstawowe techniki zliczania obiektów (metoda bijektywna, reguła włączania i wyłączania, rekurencja).
5. Funkcje tworzące i ich zastosowania.

Geometria

1. Geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni.
2. Podstawowe twierdzenia geometrii trójkąta.
3. Twierdzenie Pitagorasa, różne dowody.
4. Elementy geometrii okręgów. Inwersja.
5. Konstrukcje geometryczne.
6. Przykłady izometrii płaszczyzny euklidesowej. Izometrie własne figury.
7. Podobieństwo i jednokładność na płaszczyźnie euklidesowej. Przekształcenia afiniczne (własności, przykłady).
8. Krzywe stożkowe.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, definicja prawdopodobieństwa w przestrzeniach przeliczalnych, prawdopodobieństwo geometryczne.
3. Niezależność zdarzeń losowych. Schemat Bernoulliego.
4. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.
5. Zmienne losowe, rozkład zmiennej losowej (dwumianowy, Poissona, jednostajny, normalny, wykładniczy), dystrybuanta, parametry liczbowe rozkładu zmiennej losowej.
6. Prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne.
7. Elementy statystyki opisowej (histogram, wielokąt częstości, krzywa częstości względnych, miary tendencji centralnej i rozproszenia).

Metodyka nauczania matematyki

1. Proces kształtowania pojęcia matematycznego w nauczaniu szkolnym na II i III etapie edukacyjnym (na wybranych przyładach ważnych pojęć matematyki szkolnej).
2. Przykłady różnych sposobów argumentowania dostepnych dla uczniów na II i III etapie edukacyjnym.
3. Elementy logiki w nauczaniu matematyki na II i III etapie edukacyjnym.
4. Aspekty metodyczne procesu wprowadzania jezyka symbolicznego na lekcjach matematyki.
5. Przykłady zadań z II lub III etapu edukacyjnego, które w naturalny sposób wprowadzają ucznia w typowe dla matematyki techniki i strategie rozumowania.
6. Przykłady dedukcji lokalnej w nauczaniu geometrii.