Zagadnienia na egzamin magisterski

Kierunek Matematyka
Specjalność nauczycielska - nauczanie matematyki

Niniejsze opracowanie zawiera wykaz zagadnień, w oparciu o które będą formułowane pytania na egzaminach magisterskich studentów specjalności nauczanie matematyki. Jego celem jest ułatwienie systematycznego przeglądu wiadomości i podsumowania swojej wiedzy w trakcie przygotowań do egzaminu magisterskiego. Opracowanie i udostępnienie studentom poniższego wykazu zagadnień nie oznacza jednak, że przedmiotem egzaminu nie mogą być inne, nie ujęte tu, a poznane w czasie studiów teorie czy problemy matematyczne (np. pewne specjalistyczne zagadnienia, związane bliżej z tematyką pracy magisterskiej). W trakcie egzaminu magisterskiego oczekuje się od studentów głównie wykazania umiejętności syntetycznego przedstawiania zagadnień matematycznych, poznanych teorii i ich zastosowań. Z uwagi na szeroki zakres materiału, od zdających oczekuje się jedynie, aby omawiając ważne twierdzenia potrafili przedstawić tylko główną ideę ich dowodów (ewentualnie szkic dowodu) a także, by potrafili wszechstronnie ilustrować omawiane pojęcia i dotyczące ich twierdzenia przykładami.

Analiza matematyczna

1. Rachunek zdań i kwantyfikatorów. Algebra zbiorów. Relacje: równoważności, porządku.
2. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji, funkcje różnowartościowe i „na".
3. Przegląd funkcji elementarnych (definicje, wykresy i podstawowe własności).
4. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
5. Pojęcie ciągu liczbowego i jego granicy. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów. Podciągi i punkty skupienia. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.
6. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
7. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na odcinkach domkniętych i ograniczonych.
8. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
9. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
10. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Szereg potęgowy. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
11. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.
12. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.
13. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne cząstkowe i pochodna mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.

14. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).

15. Całkowanie funkcji dwóch i trzech zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).

16. Miara Lebesgue'a. Całka Lebesgue'a i jej związek z całką Riemanna.

17. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe.

18. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych(informacyjnie). Podstawowe typy równań skalarnych (o zmiennych rozdzielonych, liniowe, zupełne) i układy równań liniowych.

Algebra

1. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej.

2. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.

3. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń, liniowa niezależność, baza, wymiar.

4. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.

5. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania, eliminacja Gaussa, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.

6. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu), znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy.

7. Funkcjonały dwuliniowe - istnienie bazy ortogonalnej, funkcjonały dodatnio określone, kryterium Sylvestera, ortogonalizacja Schmidta, iloczyn skalarny, nierówność Schwarza.

8. Grupy - definicja i podstawowe przykłady (grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n). Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.

9. Pierścienie - definicja i podstawowe przykłady (pierścień liczb całkowitych, pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy kwadratowych nad danym ciałem, pierścienie reszt modulo n). Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.

10. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, ciała skończone F_p). Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.

Arytmetyka

1. Podzielność liczb całkowitych, własności liczb pierwszych, rozkład na czynniki, algorytm Euklidesa.

2. Własności kongruencji w zbiorze liczb całkowitych, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Wilsona.

3. Funkcja Eulera, twierdzenie Eulera. Twierdzenie chińskie o resztach.

Geometria

1. Geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni. Równania prostych i płaszczyzn. Krzywe stożkowe.
2. Podstawowe twierdzenia geometrii trójkąta.
3. Twierdzenie Pitagorasa, różne dowody.
4. Konstrukcje geometryczne.
5. Przykłady izometrii płaszczyzny euklidesowej. Grupa izometrii własnych figury.
6. Podobieństwo i jednokładność na płaszczyźnie euklidesowej. Przekształcenia afiniczne (własności, przykłady).

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).
2. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.
3. Niezależność zdarzeń losowych. Schemat Bernoullego.
4. Zmienne losowe, rozkład zmiennej losowej (normalny, Poissona, dwumianowy), dystrybuanta, parametry liczbowe rozkładu zmiennej losowej. Niezależność zmiennych losowych.
5. Prawa wielkich liczb.
6. Centralne twierdzenie graniczne, przykłady zastosowań.
7. Elementy statystyki opisowej (histogram, miary tendencji centralnej i rozproszenia).
8. Estymacja punktowa i przedziałowa parametrów rozkładu. Testowanie hipotez statystycznych.

Topologia

1. Pojęcie metryki oraz przestrzeni metrycznej. Przykłady przestrzeni metrycznych.
2. Zbieżność w przestrzeni metrycznej. Pojęcie zbioru otwartego i domkniętego w przestrzeni metrycznej. Pojęcie ciągłości odwzorowań przestrzeni metrycznych.
3. Pojęcie przestrzeni metrycznej spójnej, zwartej oraz zupełnej i ich własności. Charakteryzacja zbioru zwartego w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zasada Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji.
4. Przestrzenie topologiczne i przekształcenia ciągłe.
5. Operacje na przestrzeniach topologicznych: podprzestrzenie, produkt, przestrzeń ilorazowa.
6. Aksjomaty oddzielania.
7. Przestrzenie topologiczne zwarte, przestrzenie topologiczne spójne.

Analiza zespolona

1. Funkcje zmiennej zespolonej: definicja, dziedzina, część rzeczywista i urojona. Funkcje elementarne: wielomian, funkcje wymierne, funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne, funkcja logarytmiczna.
2. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Warunek konieczny istnienia pochodnej w sensie zespolonym – równania Cauchy'ego-Riemanna. Pochodne zespolone funkcji elementarnych zespolonych. Pojęcie funkcji holomorficznej.
3. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego.
4. Szereg potęgowy. Rozwijalność w szereg funkcji holomorficznej. Rozwinięcia funkcji elementarnych.
5. Twierdzenie Liouville'a.
6. Rozwijalność funkcji w szereg Laurenta.

Analiza funkcjonalna

1. Przestrzenie Banacha: definicja i przykłady.
2. Podstawowe twierdzenia analizy funkcjonalnej (Hahna-Banacha, Zasada jednostajnej ograniczoności, Kreina-Milmana, o domkniętym wykresie).
3. Przestrzenie Hilberta. Bazy ortonormalne, szeregi Fouriera.
4. Rozwijalność funkcji okresowych w szereg Fouriera.

Logika matematyczna

1. Pojęcie teorii matematycznej. Aksjomatyzacja teorii, przykłady teorii określonych aksjomatycznie.
2. Aksjomatyka ZF (ZFC) teorii zbiorów.
3. Aksjomatyka Peano. Indukcja matematyczna.

Ponadto oczekuje się od osoby zdającej egzamin znajomości treści kierunkowych objętych zaliczonymi przedmiotami do wyboru związanymi z tematyką pracy magisterskiej.

Uwaga. Należy zwrócić uwagę na metody kształtowania pojęć matematycznych w nauczaniu szkolnym.