Zagadnienia na egzamin magisterski

Kierunek Matematyka, specjalność: zastosowania matematyki

Niniejsze opracowanie zawiera wykaz zagadnień, w oparciu o które będą formułowane pytania na egzaminach magisterskich studentów specjalności zastosowania matematyki. Jego celem jest ułatwienie systematycznego przeglądu wiadomości i podsumowania swojej wiedzy w trakcie przygotowań do egzaminu magisterskiego. Opracowanie i udostępnienie studentom poniższego wykazu zagadnień nie oznacza jednak, że przedmiotem egzaminu nie mogą być inne, nie ujęte tu, a poznane w czasie studiów teorie czy problemy matematyczne (np. pewne specjalistyczne zagadnienia, związane bliżej z tematyką pracy magisterskiej). W trakcie egzaminu magisterskiego oczekuje się od studentów głównie wykazania umiejętności syntetycznego przedstawiania zagadnień matematycznych, poznanych teorii i ich zastosowań. Z uwagi na szeroki zakres materiału, od zdających oczekuje się jedynie, aby omawiając ważne twierdzenia potrafili przedstawić tylko główną ideę ich dowodów (ewentualnie szkic dowodu) a także, by potrafili wszechstronnie ilustrować omawiane pojęcia i dotyczące ich twierdzenia przykładami.

Podstawy matematyki

1. Rachunek zdań i kwantyfikatorów. Algebra zbiorów.
2. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji, funkcje różnowartościowe i „na".
3. Relacje. Relacja równoważności, zbiory ilorazowe - definicje i przykłady.
4. Moc zbioru. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.
5. Porządek w zbiorze, porządek liniowy, dobry porządek - definicje i przykłady. Lemat Kuratowskiego-Zorna - przykłady zastosowań.
6. Aksjomatyka Peano liczb naturalnych. Indukcja matematyczna.

Algebra

1. Teoria podzielności liczb całkowitych (NWD, algorytm Euklidesa, liczby pierwsze, kongruencje).
2. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej.
3. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.
4. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń, liniowa niezależność, baza, wymiar.
5. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.
6. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania, eliminacja Gaussa, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.
7. Równania prostych i płaszczyzn w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ (równanie ogólne, kierunkowe, parametryczne, wyznacznikowe). Iloczyn wektorowy w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
8. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu). Wartości własne i wektory własne endomorfizmów i macierzy.

9. Funkcjonały dwuliniowe - istnienie bazy ortogonalnej, funkcjonały dodatnio określone, kryterium Sylvestera, ortogonalizacja Schmidta, iloczyn skalarny, nierówność Schwarza.
10. Grupy - definicja i podstawowe przykłady (grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n). Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.
11. Pierścienie - definicja i podstawowe przykłady (pierścień liczb całkowitych, pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy kwadratowych nad danym ciałem, pierścienie reszt modulo n). Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.
12. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, ciała skończone F_p). Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.

Analiza matematyczna

1. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
2. Pojęcie ciągu liczbowego i jego granicy. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów. Podciągi i punkty skupienia. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.
3. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
4. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na przestrzeniach zwartych i spójnych.
5. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
6. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
7. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Szereg potęgowy. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
8. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.
9. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.
10. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne: cząstkowe, słaba, mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.
11. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).
12. Całkowanie funkcji wielu zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).
13. Miara Lebesgue'a. Całka Lebesgue'a i jej związek z całką Riemanna.
14. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe.

Topologia

1. Pojęcie metryki oraz przestrzeni metrycznej. Przykłady przestrzeni metrycznych.
2. Zbieżność w przestrzeni metrycznej. Pojęcie zbioru otwartego i domkniętego w przestrzeni metrycznej. Pojęcie ciągłości odwzorowań przestrzeni metrycznych.
3. Pojęcie przestrzeni metrycznej spójnej, zwartej oraz zupełnej i ich własności. Charakteryzacja zbioru zwartego w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Zasada Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji.
4. Przestrzenie topologiczne i przekształcenia ciągłe.
5. Operacje na przestrzeniach topologicznych: podprzestrzenie, produkt, przestrzeń ilorazowa.
6. Aksjomaty oddzielania.
7. Przestrzenie topologiczne zwarte, przestrzenie topologiczne spójne.

Analiza zespolona

1. Funkcje zmiennej zespolonej: definicja, dziedzina, część rzeczywista i urojona. Funkcje elementarne: wielomian, funkcje wymierne, funkcja wykładnicza, funkcje trygonometryczne, funkcja logarytmiczna.
2. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Warunek konieczny istnienia pochodnej w sensie zespolonym – równania Cauchy'ego-Riemanna. Pochodne zespolone funkcji elementarnych zespolonych. Pojęcie funkcji holomorficznej.
3. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego.
4. Szereg potęgowy. Rozwijalność w szereg funkcji holomorficznej. Rozwinięcia funkcji elementarnych.
5. Twierdzenie Liouville'a.
6. Rozwijalność funkcji w szereg Laurenta.

Analiza funkcjonalna

1. Przestrzenie Banacha: definicja i przykłady.
2. Podstawowe twierdzenia analizy funkcjonalnej (Hahna-Banacha, Zasada jednostajnej ograniczoności, Kreina-Milmana, o domkniętym wykresie).
3. Przestrzenie Hilberta. Bazy ortonormalne, szeregi Fouriera.
4. Rozwijalność funkcji okresowych w szereg Fouriera.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).
2. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.
3. Niezależność zdarzeń losowych. Schemat Bernoullego.

4. Zmienne losowe, rozkład zmiennej losowej, dystrybuanta, parametry liczbowe rozkładu zmiennej losowej. Niezależność zmiennych losowych.

5. Prawa wielkich liczb.

6. Centralne twierdzenie graniczne, przykłady zastosowań.

Statystyka matematyczna

1. Charakterystyki opisujące empiryczne rozkłady prawdopodobieństwa (średnia z próbki, wariancja z próbki, dystrybuanta empiryczna itd.) i ich odpowiedniki populacyjne.

2. Estymacja statystyczna, ryzyko (błąd średniokwadratowy) estymatora, estymatory nieobciążone, efektywne.

3. Zastosowanie twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa w statystyce: zgodność estymatorów, asymptotyczna normalność, estymacja przedziałowa.

4. Testowanie hipotez statystycznych, błąd I i II rodzaju, poziom istotności.

5. Regresja, metoda najmniejszych kwadratów.

Równania różniczkowe

1. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego oraz jego rozwiązania, interpretacja geometryczna. Podstawowe przykłady równań różniczkowych zwyczajnych.

2. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania różniczkowego zwyczajnego (informacyjnie).

3. Układy równań różniczkowych liniowych.

4. Metoda rozdzielonych zmiennych na przykładzie jednowymiarowych równań przewodnictwa ciepła i struny z warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna.

5. Zasada maksimum i jednoznaczność dla równania Poissona z warunkami brzegowymi typu Dirichleta.

Metody numeryczne

1. Wzór interpolacyjny Newtona, obliczanie ilorazów różnicowych.

2. Interpolacja trygonometryczna, szybkie przekształcenie Fouriera.

3. Rozwiązywanie numeryczne równań różniczkowych zwyczajnych.

Ponadto oczekuje się od osoby zdającej egzamin znajomości treści kierunkowych objętych zaliczonymi przedmiotami do wyboru związanymi z tematyką pracy magisterskiej.