Zagadnienia na egzamin licencjacki z matematyki

Studia międzyobszarowe Matematyka i Ekonomia

Zaleca się, by egzamin dyplomowy składał się z co najmniej trzech pytań. Jedno z pytań dotyczyć może tematyki pracy dyplomowej, może być to krótka prezentacja pracy lub pytanie dotyczące zagadnień bezpośrednio z nią związanych. Pytanie takie może wykraczać poza poniższy zestaw zagadnień. Pozostałe pytania dotyczą treści przedmiotów obowiązkowych oraz przedmiotów do wyboru realizowanych przez studenta, zob. lista poniżej.

Analiza matematyczna

1. Rachunek zdań i kwantyfikatorów. Algebra zbiorów. Relacje: równoważności, porządku.
2. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji, funkcje różnowartościowe i „na”.
3. Przegląd funkcji elementarnych (definicje, wykresy i podstawowe własności).
4. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
5. Pojęcie ciągu liczbowego i jego granicy. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów. Podciągi i punkty skupienia. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.
6. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
7. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na odcinkach domkniętych i ograniczonych.
8. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
9. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
10. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Szereg potęgowy. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
11. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.
12. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.
13. Podstawowe pojęcia topologii metrycznej, przestrzenie zupełne, zwarte i spójne; podzbiory zwarte przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
14. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne cząstkowe i pochodna mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.
15. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).
16. Całkowanie funkcji dwóch i trzech zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).

17. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe.

18. Miara Lebesgue'a. Całka Lebesgue'a, porównanie z całką Riemanna.

19. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej. Warunek konieczny istnienia pochodnej w sensie zespolonym - równania Cauchy'ego-Riemanna. Funkcja wykładnicza.

20. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. Podstawowe typy równań skalarnych (o zmiennych rozdzielonych, liniowe, zupełne) i układy równań liniowych.

Algebra

1. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej, pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej.

2. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.

3. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń, liniowa niezależność, baza, wymiar.

4. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.

5. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania, eliminacja Gaussa, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.

6. Równania prostych w $\mathbb{R}^2$.

7. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu), znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy.

8. Rzeczywiste funkcjonały dwuliniowe, funkcjonały dodatnio określone, kryterium Sylvestera, ortonormalizacja Schmidta, iloczyn skalarny, nierówność Schwarza.

9. Grupy - definicja i podstawowe przykłady (grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n). Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.

10. Pierścienie - definicja i podstawowe przykłady (pierścień liczb całkowitych, pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy kwadratowych nad danym ciałem, pierścienie $\mathbb{Z}_n$ reszt modulo n). Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.

11. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, ciała skończone F_p). Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, definicja prawdopodobieństwa w przestrzeniach przeliczalnych.

3. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.

4. Niezależność zdarzeń losowych. Schemat Bernoulliego.

5. Zmienne losowe, rozkład zmiennej losowej, dystrybuanta, parametry liczbowe rozkładu zmiennej losowej. Niezależność zmiennych losowych.

6. Prawa wielkich liczb.

7. Centralne twierdzenie graniczne, przykłady zastosowań.

8. Elementy statystyki opisowej (histogram, wielokąt częstości, krzywa częstości względnych, miary tendencji centralnej i rozproszenia).

9. Estymacja punktowa i przedziałowa parametrów rozkładu.

10. Pojęcie testu statystycznego (hipoteza zerowa, hipoteza alternatywna, statystyka testowa, obszar krytyczny, błędy I i II rodzaju). Przykłady testów.