Zagadnienia na egzamin magisterski

Kierunek: matematyka
Specjalność: zastosowania matematyki w ekonomii i finansach

Niniejsze opracowanie zawiera wykaz zagadnień, w oparciu o które będą formułowane pytania na egzaminach magisterskich studentów specjalności nauczanie matematyki i informatyki. Jego celem jest ułatwienie systematycznego przeglądu wiadomości i podsumowania swojej wiedzy w trakcie przygotowań do egzaminu magisterskiego. Opracowanie i udostępnienie studentom poniższego wykazu zagadnień nie oznacza jednak, że przedmiotem egzaminu nie mogą być inne, nie ujęte tu, a poznane w czasie studiów teorie czy problemy matematyczne (np. pewne specjalistyczne zagadnienia, związane bliżej z tematyką pracy magisterskiej). W trakcie egzaminu magisterskiego oczekuje się od studentów głównie wykazania umiejętności syntetycznego przedstawiania zagadnień matematycznych i informatycznych, poznanych teorii i ich zastosowań. Z uwagi na szeroki zakres materiału, od zdających oczekuje się, aby omawiając ważne twierdzenia potrafili przedstawić tylko główną ideę ich dowodów (ewentualnie szkic dowodu), a także, by potrafili wszechstronnie ilustrować omawiane pojęcia i dotyczące ich twierdzenia przykładami.

Wstęp do matematyki

1. Liczby naturalne. Aksjomatyka Peano. Indukcja matematyczna.
2. Rachunek zdań i kwantyfikatorów. Algebra zbiorów.
3. Relacje (równoważności, częściowego porządku).
4. Pojęcia równoliczności zbiorów oraz mocy zbioru, zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne.

Analiza matematyczna

1. Podstawowe pojęcia dotyczące funkcji, funkcje różnowartościowe i „na”.
2. Przegląd funkcji elementarnych (definicje, wykresy i podstawowe własności).
3. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
4. Pojęcie ciągu liczbowego i jego granicy. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów. Podciągi i punkty skupienia. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy’ego.
5. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
6. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na odcinkach domkniętych i ograniczonych.
7. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
8. Twierdzenia Rolle’a i Lagrange’a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
9. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Szereg potęgowy. Rozwijanie

funkcji w szereg potęgowy.

10. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.
11. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.
12. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne cząstkowe i pochodna mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.
13. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).
14. Całkowanie funkcji dwóch i trzech zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).
15. Miara Lebesgue'a. Całka Lebesgue'a i jej związek z całką Riemanna.
16. Całki krzywoliniowe zorientowane i niezorientowane (informacyjnie - definicje, interpretacje fizyczne, twierdzenie Greena).
17. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych (informacyjnie). Pod- stawowe typy równań skalarnych (o zmiennych rozdzielonych, liniowe, zupełne) i układy równań liniowych.

Algebra

1. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej.
2. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.
3. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń, liniowa niezależność, baza, wymiar.
4. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.
5. Układy równań liniowych. Metody rozwiązywania, eliminacja Gaussa, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.
6. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu), znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy.
7. Funkcjonały dwuliniowe - istnienie bazy ortogonalnej, funkcjonały dodatnio określone, kryterium Sylvestera, ortogonalizacja Schmidta, iloczyn skalarny, nierówność Schwarza.
8. Grupy - definicja i podstawowe przykłady (grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n). Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.
9. Pierścienie - definicja i podstawowe przykłady (pierścień liczb całkowitych, pierścienie wielomianów, pierścienie macierzy kwadratowych nad danym ciałem, pierścienie reszt modulo n). Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.
10. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, ciała skończone F_p). Ciała algebraicznie domknięte. Zasadnicze twierdzenie algebry.

Arytmetyka

1. Podzielność liczb całkowitych, własności liczb pierwszych, rozkład na czynniki, algorytm Euklidesa.

2. Własności kongruencji w zbiorze liczb całkowitych, małe twierdzenie Fermata.

3. Funkcja Eulera, twierdzenie Eulera. Twierdzenie chińskie o resztach.

Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, wzór na prawdopodobieństwo klasyczne, prawdopodobieństwo geometryczne.

3. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.

4. Niezależność zdarzeń losowych. Schemat Bernoulliego.

5. Zmienne losowe, rozkład zmiennej losowej (dwumianowy, Poissona, jednostajny, normalny, wykładniczy), dystrybuanta, parametry liczbowe rozkładu zmiennej losowej, wartość oczekiwana, wariancja.

6. Prawa wielkich liczb (słabe Czebyszewa i mocne Kołmogorowa) oraz centralne twierdzenie graniczne.

7. Porządkowanie danych empirycznych i ich ilustracja graficzna (tablice liczebności, histogram, wykres rozproszenia), charakterystyki liczbowe próbki (mediana, średnia, wariancja, współczynnik korelacji).

8. Estymacja punktowa wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu. Estymacja przedziałowa wartości oczekiwanej.

9. Pojęcie testu statystycznego (hipoteza zerowa, alternatywna, poziom istotności, zbiór krytyczny). Przykłady testów (dla wartości oczekiwanej, test chi-kwadrat, Kołmogorowa), pojęcie błędów I i II rodzaju.

Topologia

1. Pojęcie metryki oraz przestrzeni metrycznej. Przykłady przestrzeni metrycznych.

2. Zbieżność w przestrzeni metrycznej. Pojęcie zbioru otwartego i domkniętego w przestrzeni metrycznej. Pojęcie ciągłości odwzorowań przestrzeni metrycznych.

3. Pojęcie przestrzeni metrycznej spójnej, zwartej oraz zupełnej i ich własności. Charakteryzacja zbioru zwartego w przestrzeni R^n. Zasada Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji.

4. Przestrzenie topologiczne i przekształcenia ciągłe.

5. Operacje na przestrzeniach topologicznych: podprzestrzenie, produkt, przestrzeń ilorazowa.

6. Aksjomaty oddzielania.

7. Przestrzenie topologiczne zwarte, przestrzenie topologiczne spójne.

8. Pojęcie rozmaitości topologicznej, przykłady rozmaitości z brzegiem i bez brzegu.
9. Homotopia odwzorowań, przestrzenie homotopijnie równoważne, przestrzenie ściągalne.
10. Wzór Eulera dla grafów, charakteryzacja brył platońskich za pomocą grafów na sferze.

Analiza zespolona

1. Reprezentacja trygonometryczna liczby zespolonej. Pojęcie argumentu i argumentu głównego. Wzór de Moivre'a. Pierwiastki n-tego stopnia.
2. Podstawowe funkcje zmiennej zespolonej: funkcja wykładnicza, logarytm zespolony, funkcje trygonometryczne. Definicje i własności.
3. Pojęcie pochodnej zespolonej. Definicja. Związek z różniczkowalnością w sensie rzeczywistym (w tym warunki Cauchy'ego-Riemanna). Przykłady.
4. Zespolony szereg potęgowy. Promień zbieżności. Twierdzenie o różniczkowalności szeregu potęgowego.
5. Pojęcie funkcji holomorficznej. Przykłady. Związek z rozwijalnością w szereg potęgowy.
6. Funkcja pierwotna. Definicja, przykłady. Twierdzenie o istnieniu funkcji pierwotnej.
7. Twierdzenie całkowe Cauchy'ego. Wzór całkowy Cauchy'ego. Twierdzenie Morery.
8. Zasada maksymalnego modułu.
9. Funkcje całkowite. Definicja i przykłady. Twierdzenie Liouville'a.
10. Pojęcie szeregu Laurenta. Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Laurenta.
11. Punkty osobliwe odosobnione. Definicje, przykłady.
12. Pojęcie residuum oraz indeksu. Twierdzenie o residuach.

Analiza funkcjonalna

1. Przestrzeń unormowana, przestrzeń Banacha. Przykłady.
2. Przestrzenie ciągowe (przykłady, standardowe normy, ośrodkowość, zupełność).
3. Przestrzenie funkcyjne (przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych, przestrzeń Lp([0,1]).
4. Operatory liniowe i ograniczone (definicje oraz wybrane warunki równoważne na ograniczoność).
5. Klasyczne twierdzenia analizy funkcjonalnej: twierdzenie Hahna–Banacha, twierdzenie o wykresie domkniętym, twierdzenie o odwzorowaniu otwartym, twierdzenie Banacha–Alaoglu oraz twierdzenie Kreina–Milmana.
6. Przestrzenie Hilberta (definicja i przykłady). Szeregi Fouriera.

Równania różniczkowe

1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań zagadnień poczatkowych: Twierdzenie Cauchy-Peano, Lemat Eulera, Nierówność Gronwalla, Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań, Twierdzenie Picarda-Lindel\"{o}fa.
2. Globalne twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnień początkowych.
3. Liniowe równania różniczkowe: macierz fundamentalna, Lemat Liouville'a, Twierdzenie o wariacji stałych.
4. Liniowe autonomiczne równania różniczkowe i ich rozwiązania. Własności operacji $A \to e^{At}$.
5. Potok indukowany przez autonomiczny układ równań różniczkowych.
6. Portret fazowy układów równań różniczkowych; struktura portretu fazowego w otoczeniu ustalonego punktu (lemat o prostowaniu, twierdzenie Hartmana - Grobmana); portrety fazowe liniowych autonomicznych równań różniczkowych (klasyfikacja).
7. Elementy teorii stabilności Lapunova - stabilność i asymptotyczna stabilność; funkcja Lapunova; linearyzacja autonomicznego układu równań różniczkowych a stabilność położeń równowagi.
8. Metoda rozdzielonych zmiennych dla jednowymiarowych równań przewodnictwa ciepła z warunkami brzegowymi Dirichleta i Neumanna oraz równania struny.
9. Rozwiązywanie zagadnienia Poissona na prostokątach, kołach i pierścieniach metodą rozdzielonych zmiennych.
10. Zasada maksimum i jednoznaczność dla równania Poissona z warunkami brzegowymi Dirichleta.

Analiza dynamiczna procesów ekonomicznych

1. Przykłady modeli ciągłych i modeli dyskretnych opisujących procesy ekonomiczne, w tym modele rynku i dynamiczny model Arrowa-Hurwicza.
2. Równowaga międzyokresowa. Analiza stabilności równowagi w wybranych modelach prowadzących do równań różniczkowych lub różnicowych pierwszego lub drugiego rzędu.

Modele ciągłe matematyki finansowej

1. Opis klasycznego modelu Blacka-Scholesa rynku finansowego z czasem ciągłym. Podstawowe pojęcia związane z wyceną opcji typu europejskiego (funkcja wypłaty, strategia samofinansująca się, cena sprawiedliwa).
2. Wzór na wycenę ceny sprawiedliwej europejskiego kontraktu opcyjnego. Omówienie wybranej metody aproksymacji ceny (np. metody Monte Carlo lub aproksymacji dwumianowej).

Procesy stochastyczne

1. Procesy gaussowskie i ich charakterystyki pierwszego i drugiego rzędu.
2. Rozkłady stacjonarne dla łańcuchów Markowa.
3. Twierdzenia ergodyczne dla stochastycznych procesów stacjonarnych.