

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
- 2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
 - a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
 - b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
- 3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
- 4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
- 5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
- 6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
- 7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x + 4| = 5$, $|x - 2| < 3$, $|x + 3| \geq 4$;
- 8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
- 9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
- 4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
- 5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x - a$;
- 7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż:

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}, \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}, \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-1}{x+1}.$$

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- 2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0}=1, \binom{n}{1}=n, \binom{n}{n-1}=n,$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

- 3) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3, (a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
- 2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
- 3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
- 5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
- 6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- 7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$

są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x) > 0, W(x) \geq 0, W(x) < 0, W(x) \leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
- 2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż

$$\frac{x+1}{x(x-1)} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x}{(x-1)(x+1)};$$

- 3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;

- 4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2|x+3|+3|x-1|=13$, $|x+2|+2|x-3|<11$;
- 5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żadaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
- 2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
- 3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax+by=e \\ x^2+y^2+cx+dy=f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax+by=e \\ y=cx^2+dx+f \end{cases}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego,

a ponadto rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=c \\ x^2+y^2+dx+ey=f \end{cases}$.

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- 5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- 6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
- 7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
- 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

- 10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
- 12) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x-a)$, $y = f(x)+b$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;
- 13) posługuje się funkcją $f(x) = \frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
- 14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ rysuje wykres funkcji $y = |f(x)|$;
- 2) posługuje się złożeniami funkcji;
- 3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty, -2)$.

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:
 - a)
$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1-a_n), \end{cases}$$
 - b)
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$$
- 3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- 6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- 7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
- 2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° , w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° ;
- 2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
- 3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
- 4) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;
- 5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta
$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$$
- 6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
- 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
- 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
- 4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
- 5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
- 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4 \cos 2x \cos 5x = 2 \cos 7x + 1$, $2 \sin^2 x \leq 1$.

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
- 2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa)

i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;

- 3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
- 4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombów i trapezów;
- 5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
- 6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
- 7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
- 8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
- 9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
- 10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
- 11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
- 12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
- 2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostokąt do innej prostej, styczność do okręgu);
- 3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- 4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$;
- 5) oblicza odległość punktu od prostej;
- 6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
- 7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
- 2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;

- 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastopłach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
- 4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
- 5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
- 6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastopłach, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
- 7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
- 2) wyznacza przekroje sześciianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

XI. Kombinatoryka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
- 2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
 - a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
 - b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na

liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

- 2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
- 2) stosuje skalę centylową;
- 3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
- 4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
- 5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
- 2) stosuje schemat Bernoulliego.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);
- 2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;
- 3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
- 4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
- 5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
- 6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Warunki i sposób realizacji

Korelacja. Ze względu na użyteczność matematyki i jej zastosowania w szkolnym nauczaniu fizyki, informatyki, geografii i chemii zaleca się zrealizować treści nauczania określone w działach: I pkt 9 (logarytmy) i w miarę możliwości V pkt 14, V pkt 1 (pojęcie funkcji) i V pkt 5 (funkcje liniowe) w pierwszym półroczu klasy pierwszej, zaś treści nauczania określone w działach: V pkt 11 (funkcje kwadratowe) i V pkt 13 (proporcjonalność odwrotna) nie