

Zagadnienia na egzamin licencjacki

Kierunek: matematyka

Specjalność: nauczanie matematyki

Zaleca się, by egzamin dyplomowy składał się z co najmniej trzech pytań. Jedno z pytań dotyczyć może tematyki pracy seminaryjnej, może być to krótka prezentacja pracy lub pytanie dotyczące zagadnień bezpośrednio z nią związanych. Pytanie takie może wykraczać poza poniższy zestaw zagadnień. Pozostałe pytania dotyczą treści przedmiotów realizowanych przez studenta.

Wstęp do matematyki

1. Klasyczny rachunek zdań i rachunek kwantyfikatorów: zdania w sensie logicznym, zdania proste i złożone, wartość logiczna zdania, tautologie i metoda 0-1 weryfikowania tautologiczności, uwagi o dowodzeniu w matematyce, funkcje zdaniowe, kwantyfikatory, podstawowe tautologie rachunku kwantyfikatorów.
2. Podstawy teorii zbiorów: algebra zbiorów (podzbiory i działania na zbiorach), prawa rachunku zbiorów, zbiory potęgowe, iloczyn kartezjański, działania uogólnione, uwagi o aksjomatyce teorii mnogości.
3. Liczby naturalne: uwagi o aksjomatyce Peano, zasada indukcji matematycznej i przykłady jej zastosowania.
4. Relacje: podstawowe typy relacji binarnych (zwrotna, symetryczna, przechodnia, słabo antysymetryczna, spójna), grafy i macierze relacji, relacje równoważności (klasy abstrakcji, zbiory ilorazowe zasada abstrakcji), relacje częściowego porządku (diagramy Hassego skończonych posetów, elementy ekstremalne i kresy, porządki liniowe).
5. Funkcje: funkcja jako relacja, funkcje różnowartościowe (iniekcje), funkcje "na" (surjekcje) i wzajemnie jednoznaczne (funkcje odwracalne, bijekcje), składanie funkcji, funkcja odwrotna, obraz i przeciwobraz zbioru poprzez funkcję.
6. Teoria równoliczności zbiorów: definicja równoliczności zbiorów i pojęcie mocy zbioru, zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne wraz z przykładami, twierdzenia Cantora i Cantora - Bernsteina i przykłady zastosowań, nieistnienie zbioru wszystkich zbiorów.

Analiza matematyczna

1. Przegląd funkcji elementarnych (definicje, wykresy i podstawowe własności).
2. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimiedesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
3. Pojęcie granicy ciągu liczbowego. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów, w tym twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.
4. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
5. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na odcinkach domkniętych i ograniczonych.
6. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna i fizyczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
7. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
8. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
9. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.
10. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.
11. Podstawowe pojęcia topologii metrycznej, przestrzenie zupełne, zwarte i spójne; podzbiory zwarte przestrzeni $\mathbb{R}^n$.
12. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne cząstkowe i pochodna mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.
13. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).
14. Całkowanie funkcji dwóch i trzech zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).

Algebra

1. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej.
2. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Operacje elementarne na wierszach i kolumnach. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.
3. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń liniowa niezależność, baza, wymiar.
4. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.
5. Układy równań liniowych. Rozwiązywanie metoda eliminacji niewiadomych, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.
6. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu), znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy. Diagonalizowanie macierzy.
7. Funkcjonały dwuliniowe, iloczyn skalarny, dodatnia określoność, kryterium Sylwestera, nierówność Schwarza.
8. Grupy - grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n . Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.
9. Pierścienie - pierścienie wielomianów, pierścienie reszt modulo n . Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.
10. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, przykłady ciał skończonych).

Arytmetyka i matematyka dyskretna

1. Podzielność liczb całkowitych, własności liczb pierwszych, rozkład na czynniki pierwsze, algorytm Euklidesa.
2. Własności kongruencji w zbiorze liczb całkowitych, Chińskie twierdzenie o resztach, twierdzenie Wilsona.
3. Funkcja Eulera, twierdzenie Eulera, małe twierdzenie Fermata.
4. Podstawowe techniki zliczania obiektów (metoda bijektywna, reguła włączania i wyłączania, rekurencja).
5. Funkcje tworzące i ich zastosowania.

Geometria

1. Geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni (wektory, równania prostych, płaszczyzn).
2. Podstawowe twierdzenia geometrii trójkąta.
3. Twierdzenie Pitagorasa, różne dowody.
4. Czwórki harmoniczniesprężone.
5. Potęga punktu względem okręgu.
4. Konstrukcje geometryczne związane z trójkątem.
5. Krzywe stożkowe.

Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka i analiza danych

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).
2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, wzór na prawdopodobieństwo klasyczne, prawdopodobieństwo geometryczne.
3. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.
4. Niezależność zdarzeń losowych. Schemat Bernoulliego.
5. Zmienne losowe, rozkład zmiennej losowej (dwumianowy, Poissona, jednostajny, normalny, wykładniczy), dystrybuanta, parametry liczbowe rozkładu zmiennej losowej, wartość oczekiwana, wariancja.
6. Prawa wielkich liczb (słabe Czebyszewa i mocne Kołmogorowa) oraz centralne twierdzenie graniczne.
7. Porządkowanie danych empirycznych i ich ilustracja graficzna (tablice liczebności, histogram, wykres rozproszenia), charakterystyki liczbowe próbki (mediana, średnia, wariancja, współczynnik korelacji).
8. Estymacja punktowa wartości oczekiwanej i wariancji rozkładu. Estymacja przedziałowa wartości oczekiwanej.
9. Pojęcie testu statystycznego (hipoteza zerowa, alternatywna, poziom istotności, zbiór krytyczny). Przykłady testów (dla wartości oczekiwanej, test chi-kwadrat, Kołmogorowa), pojęcie błędów I i II rodzaju.

Metodyka nauczania matematyki

1. Proces kształtowania pojęcia matematycznego w nauczaniu szkolnym na II etapie edukacyjnym (na wybranych przykładach ważnych pojęć matematyki szkolnej).
2. Przykłady różnych sposobów argumentowania dostępnych dla uczniów na II etapie edukacyjnym.
3. Elementy logiki w nauczaniu matematyki na II etapie edukacyjnym.
4. Aspekty metodyczne procesu wprowadzania języka symbolicznego na lekcjach matematyki.
5. Przykłady zadań z II etapu edukacyjnego, które w naturalny sposób wprowadzają ucznia w typowe dla matematyki techniki i strategie rozumowania.