

Zagadnienia na egzamin licencjacki

Kierunek: matematyka

Specjalność: ogólna

Zaleca się, by egzamin dyplomowy składał się z co najmniej trzech pytań. Jedno z pytań dotyczyć może tematyki pracy seminaryjnej, może być to krótka prezentacja pracy lub pytanie dotyczące zagadnień bezpośrednio z nią związanych. Pytanie takie może wykraczać poza poniższy zestaw zagadnień. Pozostałe pytania dotyczą treści przedmiotów realizowanych przez studenta.

Wstęp do matematyki

1. Klasyczny rachunek zdań i rachunek kwantyfikatorów: zdania w sensie logicznym, zdania proste i złożone, wartość logiczna zdania, tautologie i metoda 0-1 weryfikowania tautologiczności, uwagi o dowodzeniu w matematyce, funkcje zdaniowe, kwantyfikatory, podstawowe tautologie rachunku kwantyfikatorów.
2. Podstawy teorii zbiorów: algebra zbiorów (podzbiory i działania na zbiorach), prawa rachunku zbiorów, zbiory potęgowe, iloczyn kartezjański, działania uogólnione, uwagi o aksjomatyce teorii mnogości.
3. Liczby naturalne: uwagi o aksjomatyce Peano, zasada indukcji matematycznej i przykłady jej zastosowania.
4. Relacje: podstawowe typy relacji binarnych (zwrotna, symetryczna, przechodnia, słabo antysymetryczna, spójna), grafy i macierze relacji, relacje równoważności (klasy abstrakcji, zbiory ilorazowe zasada abstrakcji), relacje częściowego porządku (diagramy Hassego skończonych posetów, elementy ekstremalne i kresy, porządki liniowe).
5. Funkcje: funkcja jako relacja, funkcje różnowartościowe (iniekcje), funkcje "na" (suriekcje) i wzajemnie jednoznaczne (funkcje odwracalne, bijekcje), składanie funkcji, funkcja odwrotna, obraz i przeciwobraz zbioru poprzez funkcję.
6. Teoria równoliczności zbiorów: definicja równoliczności zbiorów i pojęcie mocy zbioru, zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne wraz z przykładami, twierdzenia Cantora i Cantora - Bernsteina i przykłady zastosowań, nieistnienie zbioru wszystkich zbiorów.

Matematyka dyskretna

1. Podzielność liczb całkowitych, własności liczb pierwszych, rozkład na czynniki pierwsze, algorytm Euklidesa.
2. Własności kongruencji w zbiorze liczb całkowitych, Chińskie twierdzenie o resztach.
3. Funkcja Eulera, twierdzenie Eulera, małe twierdzenie Fermata.
4. Podstawowe techniki zliczania obiektów (metoda bijektywna, reguła włączania i wyłączania, rekurencja).
5. Funkcje tworzące i ich zastosowania.

Algebra

1. Liczby zespolone - interpretacja geometryczna, moduł, argument, postać trygonometryczna liczby zespolonej.
2. Mnożenie macierzy, rząd macierzy, macierz odwrotna. Operacje elementarne na wierszach i kolumnach. Wyznacznik, twierdzenie Laplace'a, twierdzenie Cauchy'ego, metody obliczania wyznaczników.
3. Przestrzeń liniowa, podprzestrzeń liniowa niezależność, baza, wymiar.
4. Odwzorowanie liniowe, jądro, obraz, macierz odwzorowania liniowego.
5. Układy równań liniowych. Rozwiązywanie metoda eliminacji niewiadomych, twierdzenie Cramera, twierdzenie Kroneckera-Capellego, postać zbioru rozwiązań układu równań liniowych.
6. Wielomian charakterystyczny macierzy (endomorfizmu), znajdowanie wartości własnych i wektorów własnych endomorfizmów i macierzy. Diagonalizowanie macierzy.
7. Funkcjonały dwuliniowe, iloczyn skalarny, dodatnia określoność, kryterium Sylwestera, nierówność Schwarz.
8. Grupy - grupa addytywna liczb całkowitych i jej podgrupy, grupy permutacji i ich generatory, grupy reszt modulo n . Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy, dzielniki normalne, grupy ilorazowe.
9. Pierścienie - pierścienie wielomianów, pierścienie reszt modulo n . Ideały, ideały pierwsze i maksymalne, pierścienie ilorazowe.
10. Ciała - definicja i podstawowe przykłady (ciała liczb rzeczywistych i zespolonych, przykłady ciał skończonych).

Analiza matematyczna

1. Definicja aksjomatyczna zbioru liczb rzeczywistych. Kresy zbiorów. Zasada Archimedesesa, część całkowita liczby rzeczywistej.
2. Pojęcie ciągu liczbowego i jego granicy. Podstawowe twierdzenia dotyczące granic ciągów. Pod- ciągi i punkty skupienia. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa. Zasada zupełności Cauchy'ego.
3. Pojęcie szeregu liczbowego. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych.
4. Granica i ciągłość funkcji. Podstawowe własności funkcji ciągłych, w tym na przestrzeniach zwartych i spójnych.
5. Pochodna funkcji jednej zmiennej. Interpretacja geometryczna pochodnej. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej (przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne, wypukłość i punkty przegięcia).
6. Twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a. Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej. Zastosowania do obliczania przybliżeń funkcji.
7. Zbieżność punktowa i jednostajna ciągu i szeregu funkcyjnego. Szereg potęgowy. Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy.
8. Pojęcie funkcji pierwotnej i podstawowe metody całkowania.
9. Całka Riemanna (definicja, podstawowe własności, zastosowania). Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, wzór Newtona-Leibniza.
10. Pojęcie metryki oraz przestrzeni metrycznej. Przykłady przestrzeni metrycznych.
11. Zbieżność w przestrzeni metrycznej. Pojęcie zbioru otwartego i domkniętego w przestrzeni metrycznej. Pojęcie ciągłości odwzorowań przestrzeni metrycznych.
12. Pojęcie przestrzeni metrycznej spójnej, zwartej oraz zupełnej i ich własności. Charakteryzacja zbioru zwartego w przestrzeni R^n . Zasada Banacha o punkcie stałym dla kontrakcji.
13. Różniczkowanie odwzorowań przestrzeni euklidesowych, pochodne: cząstkowe, słaba, mocna. Podstawowe twierdzenia dotyczące pochodnych odwzorowań. Ekstrema lokalne.
14. Twierdzenie o funkcji uwikłanej oraz o lokalnym odwracaniu odwzorowań. Ekstrema związane (warunkowe).
15. Całkowanie funkcji wielu zmiennych - całki iterowane, zamiana zmiennych (współrzędne biegunowe, sferyczne i walcowe).
16. Miara Lebesgue'a. Całka Lebesgue'a, porównanie z całką Riemanna.

Równania różniczkowe zwyczajne

1. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych.
2. Liniowe równania różniczkowe.

Rachunek prawdopodobieństwa

1. Elementy kombinatoryki (permutacje, wariacje, kombinacje).
2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa, definicja prawdopodobieństwa w przestrzeniach przeliczalnych.
3. Prawdopodobieństwo warunkowe, twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, wzór Bayesa.
4. Zmienne losowe, wektory losowe i ich charakterystyki liczbowe (wartości oczekiwane, wariancje).
5. Podstawowe rozkłady zmiennych losowych (normalny, Poissona, dwumianowy, jednostajny i wykładniczy).
6. Niezależność zmiennych losowych (oraz zdarzeń i rodzin zdarzeń). Schemat Bernoulliego.
7. Nierówność Czebyszewa i słabe prawo wielkich liczb. Mocne prawo wielkich liczb.
8. Centralne twierdzenie graniczne.

Statystyka i analiza danych

1. Elementy statystyki opisowej (histogram, wielokąt częstości, krzywa częstości względnych, miary tendencji centralnej i rozproszenia).
2. Elementy analizy regresji liniowej. Metoda najmniejszych kwadratów. Współczynnik determinacji.
3. Klasyfikacja i grupowanie. Algorytm k najbliższych sąsiadów. Algorytm k średnich.